

Gewinnmaximierung

Häufig hat man in der Realität bestimmte Daten gegeben und möchte diese nutzen, um Zusammenhänge mit Hilfe von Funktionen zu beschreiben, z.B. um Prognosen zu erstellen oder um beliebige Zwischenwerte ausrechnen zu können.

Auch in der Wirtschaft wird dieses Verfahren häufig eingesetzt. An einem vereinfachten Beispiel lässt sich nachvollziehen, wie der Gewinn¹ G in einem Betrieb modelliert werden kann.

In einem Monopolbetrieb² ergibt sich die Abhängigkeit des Erlöses³ E und der Gesamtkosten⁴ K von den verkauften Mengeneinheiten (ME) nach folgender Tabelle (*Preis, Erlös und Kosten in Geldeinheiten GE – z.B. also €*):⁵

a) Führe die Tabelle weiter.

ME x	Preis p (pro ME)	Erlös E	Gesamtkosten K
0	40	0	4.000
100	35	3.500	4.100
200	30	6.000	4.200
300	25	7.500	4.300
400	20	8.000	4.400
500			
600			
700			

b) Ermittle je eine Funktionsgleichung, welche

- die Gesamtkosten K ,
- den Preis⁶ p und
- den Erlös E

in Abhängigkeit von der Menge x beschreibt. Geh dabei davon aus, dass sich Preis, Erlös und Kosten in Abhängigkeit von x kontinuierlich entwickeln.

Erkläre jede der Formeln kurz schriftlich.

c) Ergänze eine Tabellenspalte in der du den Gewinn zu jedem der x -Werte einträgst. Ermittle auch eine Funktionsgleichung zu dem Gewinn G .

d) Wie groß müssen die Produktionszahlen sein, damit der Betrieb mit Gewinn arbeitet?

Für welche Anzahl von ME ist der Gewinn maximal und wie groß sind dann der Gewinn und der Preis? (Versuche, diese Aufgabe rechnerisch zu lösen, wenn das nicht gelingt, löse sie durch systematisches Probieren.)

e) Zeichne in ein Koordinatensystem die Graphen zu allen vier Funktionen (Preis, Erlös, Kosten, Gewinn). Erläutere schriftlich die Zusammenhänge zwischen diesen Funktionen.

¹ Der Gewinn ist das Geld, das der Betrieb am Ende tatsächlich in der Kasse hat.

² Wir gehen von einem Monopolbetrieb aus, um ausschließen zu können, dass ein Mitbewerber die Preisstruktur durcheinander bringt.

³ Der Erlös ist das Geld, das der Betrieb beim Verkauf einnimmt. Dabei sind noch keine Kosten berücksichtigt.

⁴ Die Gesamtkosten setzen sich zusammen aus den Fixkosten, die in jedem Fall bei der Produktion anfallen, und den Produktionskosten, die pro Stück des Produkts anfallen. Mach dir an Hand von Beispielen klar, welche Kosten in einem Betrieb Fixkosten sind und welche pro Stück anfallen!

⁵ Vereinfacht gesagt: Erlös und Gesamtkosten hängen davon ab, wie viel man verkauft.

⁶ Für dieses Modell ist es egal, wie die Preisfestsetzung zustande kommt, wir nehmen sie als gegeben hin und setzen sie für die weiteren Werte logisch fort.

Section maximizing.

a)	x	$p(x)$	$E(x)$	$U(x)$	$g(x)$
+c	0	40	0	4000	-4000
	100	35	3500	4100	-600
	200	30	6000	4200	1800
	300	25	7500	4300	3200
	400	20	8000	4400	3600
	500	15	7500	4500	3000
	600	10	6000	4600	1400
	700	5	3500	4700	-1200

$$b) \quad p(x) = 40 - \frac{5}{100}x$$

Startwert Preisnachlass von 5 € je 100 Stück
zusätzlicher Produktion

$$E(x) = p(x) \cdot x = \left(40 - \frac{5}{100}x\right) \cdot x = 40x - \frac{5}{100}x^2$$

Stückpreis · Liefer-/Produktionsmenge

$$K(x) = 4000 + x$$

Fixkosten + 1 € Produktionskosten pro Stück

$$\begin{aligned} \text{c) } g(x) &= E(x) - K(x) \\ &= (40x - \frac{5}{100}x^2) - (4000 + x) \\ &= 40x - \frac{5}{100}x^2 - 4000 - x \end{aligned}$$

$$\underline{g(x) = -\frac{5}{100}x^2 + 39x - 4000}$$

↳ Extrema ist Maximum

$$d) \textcircled{I} \quad f(x) = -\frac{5}{100}x^2 + 39x - 4000 \stackrel{!}{=} 0$$

$$x^2 - 780x + 80000 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{780}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{780}{2}\right)^2 - 80000}$$

$$x_{1/2} = \frac{780}{2} \pm 10\sqrt{721}$$

$$\Rightarrow x_1 = 685,5 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ab 122 Stk und} \\ \text{bis 685 Stk. macht die} \\ \text{Firma Gewinn} \end{array} \right.$$

$$x_2 = 121,49$$

$$\textcircled{II} \quad g'(x) = -\frac{10}{100}x + 39 \stackrel{!}{=} 0 \quad | +\frac{10}{100}x \quad | \cdot 10$$

$$\underline{x = 390}$$

$$\underline{g(390) = 3605\text{€}}$$

Die Firma macht einen maximalen Gewinn von 3.605€ mit 390 Stück.

Max. bei 390: vgl. c) oder:

$$g''(x) = -\frac{1}{10} < 0 \quad \& \quad \text{Max.} \\ \forall x \in \mathbb{R}$$

c) (Skizze)

